"회의실 2 (meeting2)" 문제 풀이

작성자: 이종영

부분문제 1

어떤 회의들의 조합에 대해 필요한 회의실의 수는 해당 회의들을 구간으로 한 구간 그래프의 연결 컴포넌트의 수와 같다. 이는 미리 회의들을 정렬해 두었다면 $O(N)$에 구할 수 있다.

이제 회의를 취소하는 모든 $N!$개의 방법을 시도해보면 $O(N \cdot N!)$에 해결할 수 있다.

부분문제 2

각 날에 중요한 것은 남아있는 회의들의 종류와 현재까지 비용의 합이다. 남아있는 회의들의 종류가 같은 경우 비용의 합이 최소인 경우들만 고려하면 된다. 즉, 유의미한 상태의 개수의 수를 $O(2^N)$개로 줄일 수 있어, 동적 프로그래밍을 이용해 문제를 $O(N \cdot 2^N)$에 해결할 수 있다.

부분문제 3

앞으로는 회의들을 제거하는 것이 아닌, 하나씩 추가하는 것으로 생각한다. 또한, 설명의 편의를 위해 회의 대신 각 정점이 구간인 구간 그래프의 측면에서 설명한다.

최종 그래프에서의 연결 컴포넌트에 대해, 해당 컴포넌트의 정점들을 연결성을 유지하며 하나씩 추가하는 것이 가능하다. 또한, 어떤 날의 연결 컴포넌트의 수는 최종 그래프의 연결 컴포넌트들 중, 그 날에 하나 이상의 정점이 포함된 컴포넌트들의 수 이상이다.

이로부터 크기의 내림차순으로 연결 컴포넌트들간의 순서를 정한 후, 현재 컴포넌트의 정점들을 모두 추가한 후 다음 컴포넌트로 넘어가는 방법이 최적의 방법임을 알 수 있다. 크기가 같은 연결 컴포넌트들끼리는 자유롭게 순서를 정할 수 있으므로, 어떤 크기 c를 가진 연결 컴포넌트의 수가 k개 있다면, 최종 답에는 $k!$이 곱해져야 한다.

이제, 하나의 연결 컴포넌트에 대해 연결성을 유지하면서 정점들을 순서대로 추가하는 방법의 수를 세어야 한다. 이는 동적 프로그래밍으로 해결할 수 있다.

$D[l, r]$을 $[l, r]$ 구간에 완전히 포함된 구간들을 모두 처리했을 때 가능한 경우의 수라고 정의하자. $[l, r]$과 겹치는 시각이 존재하며 $[l, r]$에 완전히 포함되지는 않는 어떤 구간 $[s, e]$에 대해, $[L, R] = [l, r] \cup [s, e]$로 정의하자. $D[l, r]$에서 $D[L, R]$로 전이를 하기 위해서는 $[L, R]$에는 포함되지만 $[l, r]$에는 포함되지 않는 구간들에 대한 처리가 필요하다. 이러한 구간의 개수는 미리 $O(N^2)$에 각 구간에 포함되는 구간의 수 $S[l, r]$을 2차원 부분합과 유사한 방법으로 계산해 주면 $S[L, R] - S[l, r]$로 구할 수 있다.

$[s, e]$를 제외한 $S[L, R] - S[l, r] - 1$개의 구간들은 $[s, e]$를 추가한 후 어떤 순간에 추가해도 연결성 및 연결 컴포넌트의 모양에 영향을 미치지 않는다. 따라서 이후 이 구간들을 원하는 위치에 끼워넣는다고 생각하면 답에 $(N - S[L, R] + 1)(N - S[L, R] + 2) \cdots (N - S[l, r] - 1) = \frac{(N-S[l,r]-1)!}{(N-S[L,R])!}$이 곱해짐을 알 수 있다. 즉, $D[L, R]$에 $\frac{(N-S[l,r]-1)!}{(N-S[L,R])!} D[l, r]$이 더해진다. 미리 가능한 모든 $[l, r]$에 대해 $l(l+1) \cdots r$의 값을 전처리로 구하면 하나의 전이를 $O(1)$에 할 수 있다. 가능한 $[s, e]$의 개수는 $O(N)$개가 있으므로 하나의 $[l, r]$에서의 전이는 $O(N)$이 소요된다. 상태의 수는 $O(N^2)$이므로 문제를 $O(N^3)$에 해결할 수 있다.

부분문제 4

$[L, R]$에 대해, $[l, r] \cup [s, e] = [L, R]$로 전이되는 $[l, r]$과 $[s, e]$의 조합으로 가능한 경우를 생각해 보자. 우선,

$L = S[i]$와 $R = E[j]$를 만족하는 어떤 구간 i와 j가 존재해야 하며 $L \le S[j], E[i] \le R$를 만족해야 한다. 그렇지 않다면 해당 $[L, R]$은 실제로는 존재할 수 없는 경우이다. 위를 만족하는 i와 j가 존재한다면 $i = j$인 경우와 그렇지 않은 경우를 나누어 해결한다.

$i = j$인 경우는 $[L, R] = [s, e] = [S[i], E[i]]$인 경우이다. $L < l < r < R$을 만족하는 모든 $[l, r]$에 대해, $D[L, R]$에 $\frac{(N-S[l,r]-1)!}{(N-S[L,R])!}D[l, r]$이 더해진다. $(N - S[l, r] - 1)!D[l, r]$의 합을 구해준 후, $(N - S[L, R])!$로 나누어 준다고 생각하면 2차원 부분합을 $D[L, R]$값들을 채워나가며 유지한다면 $O(1)$에 구할 수 있다. 실제로 나누는 것은 모듈러 역원을 이용해야 한다. 미리 $O(N)$에 필요한 역원들을 전처리로 구하면 $O(1)$에 구할 수 있다.

$i \ne j$인 경우는 $[s, e] = [S[i], E[i]]$이거나 $[s, e] = [S[j], E[j]]$이다. $[s, e] = [S[i], E[i]]$인 경우 $S[i] < l < E[i], r = R$을 만족하는 모든 $[l, r]$에 대해, $D[L, R]$에 $\frac{(N-S[l,r]-1)!}{(N-S[L,R])!}D[l, r]$이 더해진다. 이번에도 $(N - S[l, r] - 1)!D[l, r]$의 합을 구해준 후, $(N - S[L, R])!$로 나누어 준다고 생각하면 각 R에 대한 부분합을 $D[L, R]$값들을 채워나가며 유지한다면 $O(1)$에 구할 수 있다. $[s, e] = [S[j], E[j]]$인 경우도 비슷하게 각 L에 대한 부분합을 유지하면 $O(1)$에 구할 수 있다.

이제 $[L, R]$에 대해 가능한 전이들을 $O(1)$에 처리할 수 있어, 문제를 $O(N^2)$에 해결할 수 있다.