"학생들 (students)" 문제 풀이

작성자: 윤창기

부분문제 1

어떤 그룹에도 들어 있지 않은 학생은 첫날 신고를 하므로 이 경우 답은 1이 되고, 민원을 접수하는 학생의 목록은 모든 구간의 교집합에 속하는 학생들이 된다. 어떤 학생 v가 민원을 접수하게 되는 과정은 다음과 같다.

- v가 속해 있는 멘토링 그룹의 집합을 G_v라고 표기하자. 학생 v는 G_v 이외의 멘토링 그룹이 존재하지 않는다고 생각한다.
- G_v의 모든 그룹에 속해 있지는 않은 학생 w가 존재한다. 이러한 학생은 그룹의 정의상 무조건 존재하고, $|G_v \cap G_w| \leq |G_v| - 1$이 된다.
- 재귀적으로, v의 관점에서 w가 민원을 접수할 것이라고 예상되는 날짜 $d_w := f(w, G_v \cap G_w)$를 계산한다. $f(v, S)$는 학생 v가 S에 속한 멘토링 그룹만 볼 수 있다고 가정할 때 민원을 접수하게 되는 날짜이다.
- 만약 $\min_w d_w$날이 지났음에도 민원을 접수하지 않았다면, G_v 이외의 멘토링 그룹이 존재하지 않는다는 가정에 위배된다. 따라서 진실을 깨달은 학생 v는 다음날에 민원을 접수하며, $f(v, G_v) = \min_w f(w, G_v \cap G_w) + 1$이 된다.

가능한 $f(v, S)$의 개수는 많아야 $N \cdot 2^M$개이므로, 모든 $f(v, S)$를 계산하는데 $\mathcal{O}(N^2 2^M)$ 시간이면 충분하다. 동시에, $f(v, S)$를 계산하는 과정으로부터 무조건 신고하는 학생이 존재함을 알 수 있다. 즉, 답이 -1인 경우는 존재하지 않는다.

부분문제 2

부분문제 2는 모든 $L[i] = R[i]$인 특수한 경우로, 이 경우 서로 다른 $L[i]$의 개수가 답이 된다. 이는 $f(v, S)$를 구하는 과정을 생각하면 수학적 귀납법으로 증명할 수 있다.

부분문제 3

부분문제 3을 해결하기 위해서는 답의 값인 $\min_v f(v, G_v)$를 보다 간단한 형태로 계산할 필요가 있다. 결론부터 말해, v가 속해있지 않은 멘토링 그룹을 $H_v = G_v^c$라고 할 때 문제의 답은 $|H_{v_1} \cup \cdots \cup H_{v_k}| = M$을 만족하는 k의 최솟값이고, 가능한 모든 $T := \{v_1, \cdots, v_k\}$에 대해 학생 $v_i \in T$는 k일차에 민원을 접수한다. H_v가 구간임을 감안할 때, 조건을 만족하는 T는 문제에 주어진 모든 구간에 한 번 이상씩은 포함되는, "interval stabbing set" 중 크기가 가장 작은 것으로 이해할 수 있다.

가능한 T 중 크기가 최소인 것을 minimum stabbing set이라고 정의하고, 그 크기를 $m(U)$라고 표기하자. U는 모든 멘토링 그룹들의 집합을 의미하며, 이제 $m(U)$에 대한 수학적 귀납법으로 앞서 주장한 명제를 증명할 수 있다.

- $m(U) = 1$인 경우는 모든 멘토링 그룹에서 배제된 학생이 존재하므로 1일만에 민원이 접수된다. 학생 v가 모든 멘토링 그룹에서 배제되는 것과 $H_v = U$가 동치임에 주목하자.

- $m(U) > 1$인 경우, $m(G_v)$는 $m(U) - 1$ 또는 $m(U)$로, 각 경우는 v를 포함하는 minimum stabbing set이 존재하는 경우와 그렇지 않은 경우에 대응된다. 귀납 가정에 의해, $m(G_v) = m(U) - 1$이므로 $m(U) - 1$일까지 민원을 접수하는 학생이 나오지 않는다면 학생 v는 진실을 깨닫고 $m(G_v) + 1 = m(U)$일에 민원을 접수한다. 그렇지 않은 경우, $m(G_v) = m(U)$일이 지나기 전까지는 $G_v = U$인 경우와 그렇지 않은 경우를 구분할 수 없으므로 그 학생은 민원을 접수하지 않는다.

따라서 학생 v마다 $m(G_v)$를 계산해주면 문제의 답과 학생 v의 신고 여부를 알 수 있다. $m(G_v)$는 동적 계획법 등을 이용해 $\mathcal{O}(N + M)$ 시간에 구할 수 있으므로 총 $\mathcal{O}(N(N + M))$ 시간에 문제를 해결할 수 있다.

부분문제 4

부분문제 4는 부분문제 2의 확장된 형태로, 겹치지 않게 잡을 수 있는 구간 수의 최댓값이 답이 된다. 이 때 어떤 구간 $[L_1, R_1]$이 $[L_2, R_2]$를 완전히 포함하면 $[L_1, R_1]$을 고려할 필요가 없음을 관찰하면 좋다.

부분문제 5

이 경우 학생 i를 포함하지 않는 멘토링 그룹들의 번호가 $[0, l]$ 또는 $[r, M - 1]$의 꼴로 나타나게 된다. 따라서 $[0, l]$번 구간의 minimum stabbing set의 크기를 모든 l에 대해 동적 계획법으로 구해 두고, 마찬가지로 $[r, M - 1]$번 구간의 minimum stabbing set 크기를 구해 두면 두 minimum stabbing set의 크기를 더한 것이 답이 된다. 학생 i로 의해 두 구간이 나뉘어 있기 때문에 답이 겹치지 않음에 주목하자. 시간복잡도는 동적 계획법에 필요한 $\mathcal{O}(N + M)$이다.

부분문제 6

부분문제 4에서 관찰할 수 있듯 다른 구간을 포함하는 구간을 모두 제거할 수 있다. 이 때 남은 구간들을 끝점에 따라 정렬하면 부분문제 5와 같은 형태가 되므로 동일하게 문제를 해결할 수 있다. 시간복잡도는 정렬 및 불필요한 구간 제거까지 포함하여 $\mathcal{O}(N + M)$이고, $\mathcal{O}((N + M)\log(N + M))$ 풀이도 충분히 만점을 받을 수 있도록 제한이 설정되었다.