"철도 2 (railroad2)" 문제 풀이

작성자: 구재현

부분문제 1

모든 x, y 에 대해서, 답이 되는 D 를 이분탐색하여 구한다. x 에서 길이 D 이상인 직통 열차만을 사용하여 y 에 도달할 수 있는지는, 모든 직통 열차간의 거리를 전처리해두면 DFS를 사용하여 구할 수 있다. 직통 열차간의 거리를 전처리하는 것은, 각 정점에서 DFS를 하면 $O(N^2)$ 에 가능하다. 전체 시간 복잡도는 $O(N^4 \log(NX))$ 이다.

부분문제 3

N 개의 정점을 가진 완전 그래프 G를 생각해 보자. 이 그래프에서 정점 x 와 정점 y 간의 간선 가중치는, 트리 상의 x, y 간의 거리와 동일하다. 다음과 같은 사실을 증명할 수 있다.

Lemma. G 의 최대 스패닝 트리에 속하는 직통 열차만을 타도 된다.

증명: 만약 최적해의 어떠한 열차가 G의 최대 스패닝 트리에 속하지 않는다면, 트리 상의 경로를 이루는 직통 열차로 이 열차를 대체할 수 있다. ■

Lemma. $joy(x, y)$ 는 G 의 스패닝 트리 상에서 x, y 를 잇는 경로의 간선 가중치 최솟값이다.

증명: 트리 상의 경로는 유일하기 때문에, x, y 를 잇는 유일한 경로를 따라서 직통 열차를 타는 것이 최적해 중 하나이다. 이 때의 즐거움은, 경로 상에 있던 가장 짧은 직통 열차의 길이와 동일하다. 이는 간선 가중치의 최솟값에 대응된다. ■

고로 문제는 G 의 최대 스패닝 트리 $MST(G)$ 를 구하고, 모든 정점 x, y 에 대해서 $MST(G)$ 상에서 x, y 를 잇는 경로 중 간선 가중치의 최소를 계산하면 된다. $MST(G)$ 는 프림이나 크루스칼 알고리즘으로 계산하고, 간선 가중치 최소는 x 를 고정한 후 DFS를 사용하여 계산할 수 있다. 전체 시간 복잡도는 $O(N^2 \log N)$ 정도이다.

부분문제 9

완전 그래프 G 의 가중치는 트리의 경로 길이로 이루어졌다는 점을 사용하여, G 의 최대 스패닝 트리를 더 효율적으로 계산할 수 있다. 다음과 같은 사실을 관찰하자:

- 트리의 지름을 $u - v$ 라고 할 때, G 의 최대 스패닝 트리는 간선 $u - v$ 를 무조건 포함한다.
- 모든 정점 i 에 대해서, i 에서 가장 먼 정점을 $f(i)$ 라고 하면, G 의 최대 스패닝 트리는 간선 $i - f(i)$ 를 무조건 포함한다.
- $f(i)$ 는 u, v 중 하나이다. (아닐 경우 지름이라는 가정에 모순이다.)

트리의 지름을 $O(N)$ 시간에 계산한 후, 지름 $u - v$ 를 최대 스패닝 트리에 추가하자. 모든 $i \neq \{u, v\}$ 에 대해서, $f(i)$ 가 u, v 중 무엇인지를 거리를 비교하여 결정하고 (u, v 에서 DFS로 거리를 전처리할 수 있다.), $i - f(i)$ 를 최대 스패닝 트리에 추가하자. 지금까지 넣은 간선들은, 스패닝 트리에 무조건 들어가야만 하는 간선들이다. 또한, 정확히 $N - 1$ 개의 간선을 넣었기 때문에, 이렇게 찾은 트리가 정확히 최대 스패닝 트리가 된다.

계산한 $MST(G)$를 사용하여 $joy(x, y)$ 의 합을 계산할 수 있다. $MST(G)$ 의 간선을 가중치가 감소하는 순으로 정렬한 후, Union-Find를 사용하여 처리한 간선의 양 끝을 하나의 컴포넌트로 합쳐주자. $MST(G)$ 의 간선 $e = (x, y)$ 를 처리하는 시점에, x 의 컴포넌트에 속하는 임의의 정점 v_x 와 y 의 컴포넌트에 속하는 임의의 정점 v_y 에 대해 $joy(v_x, v_y)$ 는 e의 가중치와 동일하다. v_x, v_y 를 잇는 경로 상의 간선 중 마지막으로 처리된 간선이 e 인데, 마지막으로 처리되었다는 것은 가중치가 가장 작다는 것이기 때문이다. 고로, 간선 e 가 $joy(x, y)$ 에 기여하는 정도는, (e 의 가중치) × (x 의 컴포넌트 크기) × (y 의 컴포넌트 크기) 이다. 이 과정에서 모든 서로 다른 정점 쌍 x, y가 정확히 한 번씩 고려되므로, 위 기여되는 정도를 합하면 $joy(x, y)$ 의 합을 얻을 수 있다.

전체 시간 복잡도는 MST의 간선을 정렬하는 데 필요한 $O(N \log N)$ 이다.