

“그리드 복원 (grid_encoding)” 문제 풀이

작성자: 조승현, 박상훈

부분문제 1

$A_{i,i}$ 와 $A_{i,i+1}$ 은 모두 1이며, 이 셀들을 모두 select하면 $2N - 1$ 개의 셀이 선택된다. 한편, 0부터 $2N - 1$ 까지 $2N$ 개의 정점이 있는 그래프 G 에서 셀 (i, j) 를 정점 i 와 $N + j$ 사이에 간선을 잇는다고 생각하면 선택한 셀들로 만든 그래프 G 는 모든 정점을 연결하는 길이 $2N - 1$ 의 path가 되고, $N - 1$ 번 및 N 번 정점이 path의 양 끝점이 된다. B 에서도 값이 1인 셀들에 대해 그래프를 만들면 동일하게 길이 $2N - 1$ 의 path가 되고, 이를 통해 행과 열의 순서가 어떻게 바뀌었는지, 즉 순열 X 와 Y 를 알 수 있어 문제를 해결할 수 있다.

부분문제 2

함수 reconstruct의 파라미터는 행과 열이 순열 X, Y 에 의해 바뀐 후 주어지므로, 행과 열을 적절히 재배열하여도 문제가 없어야 한다. 오른쪽(아래쪽)으로 갈수록 열(행)에 있는 검은 칸 개수가 단조증가하게 재배열해놓고 생각하자. 왼쪽 아래 꼭짓점에서 시작해서 오른쪽 위 꼭짓점까지 흰색 칸과 검은색 칸의 경계를 그릴 수 있다. 경계 왼쪽 위 영역은 흰색, 오른쪽 아래 영역은 모두 검은색이다.

$K \leq 4N$ 풀이: 경계와 인접한 모든 칸을 선택한다. 다른 색이 존재하는 행/열의 경우, 다른 색이 각각 1개 이상 선택되어있다. 즉, 선택된 칸의 색이 모두 같은 행/열은 나머지 원소도 색이 모두 같다. 복원을 하기 위해서는 다음 과정을 반복한다. 선택된 칸의 색이 모두 같은 행/열 중 선택된 칸의 개수가 최소인 행/열을 아무거나 하나 선택하고 같은 색으로 칠한다. 색을 칠하고 나면 그 행/열은 더 이상 고려할 필요가 없기 때문에 격자에서 제거하고 재귀적으로 문제를 해결한다. 이 과정을 반복할 때 격자는 앞에서 언급한 성질을 계속 만족한다는 것을 알 수 있다.

$K \leq 2N - 1$ 풀이: 경계의 가로선 바로 위에 있는 흰색 칸, 세로선 바로 오른쪽에 있는 검은색 칸을 선택한다. 인접하는 칸 (행/열을 공유하는 칸)끼리 연결하면 체인을 구성할 수 있고 이를 통해 답을 복원할 수 있다.

부분문제 3

각 행에서 검은색인 열들의 집합은 서로 포함관계를 이룬다. 이에 따라 행과 열을 적절히 재배열하여 히스토그램 형태로 만들 수 있으므로 부분문제 2와 동일하게 해결할 수 있다.

풀이 2. 부분문제 1과 같이 그래프 G 를 만드는데, 이번에는 방향성 간선으로 만든다. $A_{i,j} = 1$ 이면 i 에서 $N + j$ 로, $A_{i,j} = 0$ 이면 $N + j$ 에서 i 로 간선을 만든다. 이 때 사이클이 존재하지 않음을 증명할 수 있다.

얻은 DAG는 (행들) (열들) (행들) (열들) ... 과 같은 위상정렬 순서를 가지게 되고, 각 그룹 내에서의 순서는 바뀔 수 있지만 다른 그룹사이의 순서는 바뀔 수 없다.

각 정점 u 에 대해 자기보다 뒤에 나오는 그룹 중 가장 앞 원소 v 가 존재한다면 간선 (u, v) 에 해당하는 셀을 select하자.

그러면 그 셀들을 보고 위상정렬 순서를 완전히 reconstruct할 수 있다. 따라서, 원래 그리드를 복원할 수 있다.