격자 트리 - 풀이

작성자: 장근영

부분문제 1

$N \le 7$의 모든 경우에 대해 트리를 그려보면 된다. $N = 7$인 완전이진트리를 제외하고 모두 부분문제 2의 경우에 속한다. 완전이진트리에서 i번 정점의 부모는 $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$번이라고 하자.

- $c_1 = c_2 = 1$인 경우에는 $\max(1 + c_3, 1 + c_4, 2 + c_5, 2 + c_6)$와 $\max(2 + c_3, 2 + c_4, 1 + c_5, 1 + c_6)$ 중 작은 값이 답이다. 0번 정점과 자식을 잇는 경로 중 하나의 길이를 2 이상이어야 하기 때문이다.
- $c_1 > 1$ 또는 $c_2 > 1$인 경우에는 $\max(c_1 + c_3, c_1 + c_4, c_2 + c_5, c_2 + c_6)$가 답이다.

부분문제 2

자식이 0개인 정점 v에 대해 루트에서 v까지의 경로에 포함된 간선에 대응하는 c_v의 합을 d_v로 정의하자. D를 $\max(d_v)$로 정의하자.

트리의 격자 깊이가 D보다 크거나 같음은 자명하다. 이제 D의 격자 깊이를 가지는 트리를 그릴 수 있음을 귀납법으로 보이자. $N = 3$인 경우에는 쉽게 보일 수 있으니, $N > 3$이라고 가정하자.

편의상 0번 루트 정점의 왼쪽/오른쪽 자식을 $1, 2$번 정점이라고 하자. 이때 2번 정점은 자식이 없는 정점이다. $m_1 = (c_1, 0), m_2 = (0, D)$에 그리자. 귀납법에 의해 1번 정점의 서브트리를 격자 깊이 $D - c_1$에 그릴 수 있다. 이를 x 방향으로 c_1만큼 평행이동하자. 그러면 전체 트리를 그릴 수 있고, 이 트리의 격자 깊이가 D이다.

부분문제 3

부분문제 3에서는 정점 v와 그 부모 정점을 잇는 경로의 길이가 c_v로 고정된다. 주어진 최소 길이 조건에 맞춰 트리를 그릴 수 있는지 판별하는 문제로 환원된다.

문제를 단순화하기 위해, 길이 k의 경로를 1인 단위 경로들로 분할하고, 그 사이에 $k - 1$개의 가상 정점을 추가하자. 이제 문제는 다음과 같이 바뀐다.

- 자식의 개수가 2개 이하이고 모든 간선의 길이가 1인 트리가 주어졌을 때, 이 트리를 격자 조건에 맞춰 그릴 수 있는가?

이 변환 과정을 거치면 루트로부터 각 정점까지의 깊이는 유일하게 결정된다. 이때 트리를 올바르게 그릴 수 있기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

- 각 정점 v와 모든 자연수 k에 대해, v를 루트로 하는 서브트리에서 v와의 깊이 차이가 k인 자손 정점의 개수는 $k + 1$개 이하이다.

이에 대한 증명은 풀이의 가장 마지막 부분에 있다. 필요충분조건은 $O(n^2)$에 검증할 수 있다.

부분문제 4

각 서브트리가 점유해야 하는 최소한의 기하학적 영역을 **너비 수열**로 정의하고, 이를 리프에서부터 귀납적으로 병합하는 $O(N^2)$ 동적 계획법 풀이를 제시한다.

정의 및 성질

정점 (x, y)의 **깊이**를 $x + y$로 정의한다.

어떤 정점 v의 서브트리를 격자 트리에 그렸을 때 v에서 v의 가장 왼쪽/오른쪽 리프로 이어지는 경로로 이루어진 영역을 **껍질**이라고 하자.

임의의 서브트리 T에 대하여, **너비 수열** $L(T) = [l_0, l_1, \dots, l_k]$는 해당 서브트리를 격자상에 구현하기 위해 필요한 높이별 최소 너비를 나타낸다.

- 격자점의 높이를 (리프 노드의 깊이) − (정점의 깊이)로 정의하자. 리프 정점에 대응하는 격자점의 높이는 0이다.
- l_i는 높이 i에서 서브트리의 노드들이 점유하는 y좌표의 구간 길이의 하한값이다.
- 서브트리의 루트는 단일 정점이므로 너비가 0이며, 수열은 항상 $l_k = 0$으로 종료된다.

너비 수열 $L(T)$는 서브트리 T를 내부에 포함할 수 있는 최소한의 껍질의 각 층별 너비를 정의한다. 루트 정점에서 리프 정점을 향하는 경로의 이동 제약에 의해, 껍질의 경계는 급격한 기울기 변화를 가질 수 없다. 이를 **좋은 수열** 조건이라 한다.

- 유효한 너비 수열 l은 모든 $i > 0$에 대해 $l_i \geq l_{i-1} - 1$을 만족해야 한다.

이는 높이가 1 증가할 때, 껍질의 너비가 최대 1만큼만 감소할 수 있음을 의미한다. 기하학적으로는 껍질의 외벽이 내부로 $45°$보다 급격하게 꺾여 들어올 수 없음을 시사한다.

너비 수열은 아래와 같은 조건을 만족한다. 이를 다음 문단에서 너비 수열을 구하는 과정에서 증명한다.

- 서브트리 T에 대해 왼쪽 리프를 향하는 경로와 오른쪽 리프를 향하는 경로가 모든 높이 i에서 너비(y값 차이)가 $L(T)_i$인 껍질이 존재한다면, 껍질 내부에 T에 대응하는 격자 트리를 그릴 수 있다.

너비 수열 구하기

다이나믹 프로그래밍을 통해 각 정점별로 서브트리의 너비 수열을 구해보자.

자식이 없는 리프 노드는 높이가 0이고 너비가 0인 단일 점이므로, 다음과 같이 초기화한다.

$$L(\text{leaf}) = [0]$$

어떤 노드 u가 두 자식 v_L, v_R을 가지며, 각각의 너비 수열을 P, Q라고 하자. u와 v_L / v_R 사이의 최소 경로 길이를 c_L / c_R이라고 하면, P와 Q의 뒤에 각각 c_L / c_R개의 0을 붙여 새로운 너비 수열을 만들자.

모든 리프는 동일한 격자 깊이를 가지므로, u의 서브트리에서 높이 i의 너비는 $P_i + Q_i + 1$ 이상임을 알 수 있다.

결합된 임시 수열 S는 다음과 같이 정의하자:

$$S_i = P_i + Q_i + 1$$

(단, P, Q의 길이가 다를 경우, 정의되지 않은 인덱스의 값은 0으로 간주한다.)

단순 병합된 수열 S는 좋은 수열 조건을 위배할 수 있다. 따라서 격자 경로의 연속성을 보장하기 위해, 아래층의 너비를 기반으로 위층의 너비를 강제로 확보하는 연산을 수행한다.

보정된 수열 R은 다음과 같이 정의된다. R은 u의 너비 수열 $L(u)$가 된다.

$$R_0 = S_0$$
$$R_i = \max(S_i,\ R_{i-1} - 1) \quad (\text{for } i > 0)$$

새로 만든 수열 $L(u)$가 위에서 언급한 껍질과 너비 수열의 대응 조건을 만족함을 보는 과정에 대해 간략하게 설명하자.

높이 i에서의 너비가 $L(u)_i$인 껍질 C 내부에는, 왼쪽 경계를 따라 높이 i에서 너비가 P_i인 껍질 C_L과 오른쪽 경계를 따라 높이 i에서 너비가 Q_i인 껍질 C_R를 겹치지 않게 만들 수 있음을 어렵지 않게 증명할 수 있다. C_L과 C_R 안에 각각 v_L과 v_R의 서브트리에 대응하는 격자 트리를 그린 이후 두 격자 트리를 병합해주면 C 내부에 u의 서브트리에 대응하는 격자 트리를 그릴 수 있음을 증명할 수 있다.

너비수열의 길이는 리프 개수와 리프의 최대 깊이(루트에서 리프까지의 경로에서 c_v의 합)의 합 이하임을 보일 수 있다. 리프의 최대 깊이를 X라고 할 때 $O(N^2 + NX)$의 시간복잡도로 문제를 해결할 수 있다.

전체 풀이

각 정점의 너비 수열 L에 대해 $L_i \neq L_{i+1}$인 i의 집합 S_L을 관리하자.

두 너비 수열 P과 Q를 합치는 경우, S_Q의 원소 x에 대해 S_P에 속하지 않는 가장 작은 x 이상의 값을 S_P에 추가하는 시행을 반복하면 된다. S_L을 `std::set`으로 관리하자. small to large 기법을 사용해 $O(Nlog^2N)$에 전체 문제를 해결할 수 있다.

부분문제 3의 필요충분조건 증명

해당 조건이 필요조건인 것은 자명하다. 우리는 앞서 도출한 조건이 트리를 그리기 위한 충분조건임을 구성적 증명을 통해 보인다. 증명은 트리의 높이(리프부터 루트까지의 경로 길이)에 대한 수학적 귀납법을 사용한다.

1. 정의 및 세팅

- 경로 분할
  입력으로 주어진 각 정점 v와 그 부모를 잇는 경로의 길이가 c_v일 때, 이를 길이 1인 단위 경로 c_v개로 분할하고 그 사이에 $c_v - 1$개의 가상 정점을 추가한다. 이제 인접한 정점 사이의 모든 경로의 길이는 1로 통일된다. 이 과정에서 가상 정점들도 편의상 자식이 1개인 정점으로 취급하며, 원래 v가 부모의 왼쪽 자식이었다면 분할된 경로의 가장 위쪽(부모와 연결되는) 가상 정점이 왼쪽 자식의 성질을 갖는다고 간주한다.
- 초기 리프 배치
  왼쪽에서 오른쪽으로 정렬된 $M = \frac{N+1}{2}$개의 리프 정점들을 좌표 평면 상의 대각선 $x + y = K$ 위에 배치한다. 왼쪽에서 i번째 리프 정점 l_i의 좌표는 $(K - (i-1), i-1)$로 설정한다. 따라서 리프 정점들의 y좌표는 $0, 1, \ldots, M-1$로 고정된다.
- 밀집 상태
  정점 x에 대해 x의 서브트리에 있는 리프 정점들의 y좌표가 연속하다면 x가 밀집 상태에 있다고 한다. 정의에 의해 모든 리프는 밀집 상태이다.
- L / R 방향

부모를 L / R 방향으로 결정한다는 것은, 현재 정점의 위치에 $(-1,0)$ / $(0,-1)$을 더해 부모 정점의 위치를 정한다는 것이다.

2. 귀납법을 통한 증명

각 정점의 자식 개수가 2개 이하인 트리가 주어지고, 리프 정점들의 좌표가 고정되어 있다고 하자. 이때, 주어진 트리와 리프의 배치가 다음 두 조건을 모두 만족한다면, 트리를 격자 평면 위에 올바르게 그릴 수 있다.

- 너비 조건: 임의의 정점 x에 대하여, x의 왼쪽 자식을 타고 내려가서 도달하는 리프 u와, x의 오른쪽 자식을 타고 내려가서 도달하는 리프 v에 대해 다음 부등식이 성립한다.

$$y_v - y_u \leq \text{depth\_diff}(x)$$

  (여기서 $\text{depth_diff}(x)$는 정점 x와 리프 정점 사이의 깊이 차이를 의미하며, y_u, y_v는 리프 정점의 y좌표를 의미한다.)
- 밀집도 조건: 임의의 정점 x와 자연수 k에 대하여, x의 자손 중 x와의 깊이 차이가 k인 정점의 개수는 $k+1$개 이하이다.

트리의 깊이에 대한 귀납법을 사용하자. 깊이가 $h+1$인 트리에서 위 두 조건이 성립할 때, 현재 리프들의 부모 정점을 적절히 배치한 이후 리프들을 제거해서 깊이가 h인 새로운 트리를 만든다. 새로 만든 트리가 위 귀납 가정을 만족함을 보임으로써 증명을 완성할 것이다.

3. 부모 정점 좌표 결정 전략

깊이가 $h+1$인 트리의 리프 정점들의 위치가 고정되어 있을 때, 각 리프의 바로 위 **부모 정점들의 위치**를 결정한다. 현재 트리의 리프들을 모두 제거하면 깊이가 h인 트리가 되며, 원래 리프들의 부모 정점들이 이 새로운 트리의 리프(이하 새로운 리프)가 된다.

각 정점 x에 대해, x의 서브트리에 속한 현재 리프들이 x쪽(부모 방향)으로 이동할 방향은 다음 알고리즘에 따라 결정한다.

- x가 밀집 상태인 경우: x가 어떤 정점의 왼쪽 자식이라면 모든 리프의 부모를 L방향으로, 오른쪽 자식인 경우 R 방향으로 결정한다.
- x가 밀집 상태가 아닌 경우: 양쪽 자식에 대해 재귀적으로 부모 방향을 결정한다.

단, 전체 트리의 루트가 밀집 상태라면 모든 리프의 부모 방향을 L방향으로 결정한다.

4. 유효성 증명

새로운 리프들의 위치를 결정하면서, 부모가 같은 두 리프 정점이 같은 부모 위치를 결정했는지, 부모가 다른 두 리프 정점이 다른 부모 위치를 결정했는지를 확인해야 한다. 또한 귀납 조건을 잘 유지했는지 보여야 한다. 밀집도 조건은 트리의 구조적인 성질이므로 너비 조건이 잘 성립하는지만 확인하면 된다.

1) 너비 조건 확인

- 정점 x가 밀집 상태가 아닌 경우
  x의 서브트리 내부 가장 왼쪽 자식은 L 방향을 선택했고, 가장 오른쪽 자식은 R 방향을 선택했다. 두 리프들 사이의 y좌표 차이(너비)는 1 감소하고, x까지의 높이 차이 또한 1 감소한다. 부등식의 양변이 같이 1씩 감소하므로 조건은 유지된다.
- 정점 x가 밀집 상태인 경우
  너비 조건이 유지됨은 원래 트리의 밀집도 조건에 의해 보장된다.

2) 같은 부모 정점을 가지는 두 리프의 부모 위치

- 같은 부모 p를 공유하는 두 리프 정점 u(왼쪽 자식), v(오른쪽 자식)가 있다고 하자. 이들은 이번 단계에서 정확히 하나의 정점 p로 병합되어야 한다.
- u와 v가 같은 부모를 가지므로, u와 v를 포함하는 서브트리는 밀집 상태가 아님을 알 수 있다. 따라서 u는 L 방향으로, v는 R 방향으로 부모 위치를 결정한다.
- 너비 조건에 의해 u와 v의 y좌표 차이는 부모 p와의 깊이 차이인 1보다 작거나 같아야 한다. 서로 다른 두 리프는 겹칠 수 없으므로, u와 v 사이의 간격은 정확히 1이다.
- 따라서 u와 v의 부모 위치는 일치한다

3) 다른 부모 정점을 가지는 두 리프의 부모 위치

두 리프 정점의 부모가 다르지만 결정한 부모 위치가 같다고 가정하자. 두 리프의 y 좌표 차이는 1이다.

- 두 정점의 조상 중 자식을 2개 가지는 가장 가까운 조상이 x로 같은 경우:
  x는 밀집 상태에 있으므로 두 정점은 같은 방향으로 부모를 선택하게 되고, 결정된 두 부모의 위치는 다르기 때문에 모순이다.
- 두 정점의 조상 중 자식을 2개 가지는 가장 가까운 조상이 다른 경우: 두 리프를 모두 서브트리 내부에 가지는 가장 가까운 정점을 x라고 하자. 한 리프 u는 x의 왼쪽 자식 l의 가장 오른쪽 리프이고, 다른 리프 v는 x의 오른쪽 자식 r의 가장 왼쪽 리프이다. x가 밀집 상태인 경우에는 같은 논리로 모순이다. l과 r이 동시에 밀집상태인 경우는 x가 밀집 상태인 것과 동일하기 때문에 일어날 수 없다. 따라서 u가 R 방향으로 부모를 결정하거나 v가 L 방향으로 부모를 결정하고, 두 리프의 부모 위치는 다르게 결정된다.

따라서 새로 구성된 높이 h인 트리와 새로운 리프들은 귀납 가정을 모두 만족한다. 귀납 가설에 의해 전체 트리를 그릴 수 있다. ■