날다람쥐 2 – 풀이

작성자: 박상훈

부분문제 1

다음과 같은 dp를 정의하자.

$dp[i][j][k]$: 수평 위치 i까지 왔을 때, 높이가 j이고 점프 횟수가 k일 때 최소 시간, 불가능하면 ∞

상태 수는 $O(N^3)$이고 전이는 $O(1)$이므로 시간복잡도 $O(N^3)$에 문제를 해결할 수 있다.

부분문제 2

$L[i] \leftarrow \max(L[i-1], L[i])$, $R[i] \leftarrow \min(R[i], R[i+1])$을 해도 문제는 동일하다. 따라서, 앞으로 L과 R이 단조증가한다고 가정한다.

조건을 만족하는 경로가 존재하는지 판별하면 충분하다. R이 단조증가하므로 1만큼 올라가는 것이 가능할 때마다 올라가는 그리디 알고리즘을 구현하면 부분문제를 해결할 수 있다.

부분문제 3

편의상 $L[N] = R[N] = H$라고 하자.

높이 $h(1 \le h \le H)$에 대해, $s_h = \min\{i | R[i] \ge h\}$, $e_h = \min\{i | L[i] \ge h\}$라고 하자. 높이 $h-1$에서 h로 올라가는 것이 가능한 수평 위치는 구간 $[s_h, e_h]$와 동일하다. L과 R이 단조증가하므로 s와 e도 단조증가한다.

수평 위치 $i(0 \le i \le N-1)$가 구간 $[s_h, e_h]$에 속할 때만 간선으로 연결하여 만든 이분그래프를 생각하자. s와 e가 단조증가하므로 임의의 크기 H의 매칭에 대해, 매칭에 속한 수평 위치에서 높이를 1씩 증가시키는 해가 존재한다. 따라서, 최소 비용 최대 매칭을 구하는 문제로 생각할 수 있다.

다음 그리디 알고리즘으로 얻은 S가 최적해임은 잘 알려져 있다(MCMF):

1. $S = \emptyset$으로 시작한다.
2. $A[i]$가 증가하는 순으로 보면서, $S \cup \{i\}$를 덮는 매칭이 존재한다면 $S \leftarrow S \cup \{i\}$을 반복한다.

주어진 집합 S와 고정된 양의 실수 $\epsilon < \frac{1}{4H}$에 대해, 다음 방식으로 구성한 문자열 $str(S)$을 생각하자:

1. 수평 위치 $i \in S$에 `*`을 적는다.
2. 수평 위치 $s_h - h\epsilon$에 `(`를 적는다.
3. 수평 위치 $e_h + h\epsilon$에 `)`를 적는다.
4. 수평 위치가 증가하는 순으로 문자를 이어붙인다.

홀의 정리에 의해, S를 덮는 매칭이 존재할 필요충분조건은 $str(S)$의 부분수열(연속하지 않아도 됨) 중 `))...))**...**((...((` 꼴의 부분수열의 최대 길이가 H이하이다.

따라서, 앞서 말한 그리디 알고리즘을 세그먼트 트리를 사용하여 구현할 수 있다. 시간복잡도는 $O(N \log N)$이다.

부분문제 4

편의상 $A[i] \leftarrow A[i] + 2^{-i-100}$를 했다고 생각한다. 이렇게 하면 모든 서로 다른 집합에 대해서 비용의 합이 다르다. $T[i] \neq -1$인 i에 대해, $T[i]$에 대응되는 집합을 $S(i)$라고 하자. 또한, 부분문제 3에서와 정의한 대로 해당 S와 구간들 간에 매칭이 존재하는 점프 위치의 부분집합 S 를 좋은 집합이라고 정의한다.

다음 사실이 성립한다:

1. $T[i] \neq -1$을 만족하는 i는 구간 $[l, r]$로 표현 가능하다.
2. $l \leq i \leq r-1$인 임의의 i 에 대해, $S(i)$에서 $B[x] = 0$인 원소를 하나 제거하고 $B[x] = 1$인 원소를 하나 추가하여 $S(i+1)$을 만들 수 있다.
3. $l \leq i \leq r$에서 $T[i]$는 볼록하다.

이 사실은 모두 다음 정리에 의해 따라온다:

- S_1, S_2를, 좋은 집합이라고 하자. 임의의 $x \in S_1 \setminus S_2$에 대해서, 어떠한 위치 $y \in S_2 \setminus S_1$이 존재하여 $S_1 - \{x\} + \{y\}$ 와 $S_2 - \{y\} + \{x\}$가 모두 매칭 조건을 만족한다.

S_1 과 구간간의, S_2 와 구간간의 매칭을 그려보면, 임의의 $x \in S_1 \setminus S_2$ 에 대해서 x와 매칭된 구간과 매칭된 S_2의 원소는 $S_2 \setminus S_1$ 에 속함을 알 수 있다. 두 원소를 교환하는 것으로 다른 매칭을 해치지 않고 두 집합이 모두 매칭 조건을 만족함을 관찰할 수 있고, 증명이 종료된다. 매트로이드 이론에 익숙하다면, 좋은 집합이 Transversal Matroid의 Basis에 대응되며, 위 정리는 Strong Base Exchange Theorem에 따라 자명함을 알 수 있다.

이제 위 사실을 모두 증명할 수 있다.

- (2) $S(i) - S(i+1)$ 에서 $B[x] = 0$ 인 원소를 찾자. 이에 따라 대응되는 $y \in S(i+1) - S(i)$ 도 찾을 수 있다. 만약 $B[y] = 0$ 인 경우, $A[x] \neq A[y]$ 이기 때문에 둘 중 하나는 최적해가 아니다. $B[y] = 1$ 인 경우, $T[i] - A[x] + A[y] = T[i+1]$ 이 아닐 경우 둘 중 하나는 최적해가 아니다.
- (1) 위 증명에 따라서 $S(l) - S(r)$ 에서 원소를 찾는 식으로 모든 $S(l+1), S(l+2), \ldots, S(r-1)$ 을 구성할 수 있다.
- (3) $T[i] - T[i-1] > T[i+1] - T[i]$ 인 i 가 존재한다고 하자. $S(i-1) - \{x_1\} + \{y_1\} = S(i), S(i) - \{x_2\} + \{y_2\} = S(i+1)$ 이라고 하자 $(B[x_1] = B[x_2] = 0, B[y_1] = B[y_2] = 1)$. $S(i-1) - \{x_2\} + \{y'\}, S(i+1) - \{y'\} + \{x_2\}$ 가 위 정리에 따라 좋은 집합이라고 하자. $S(i)$ 의 최적성에 의해 $A[y'] - A[x_2] > A[y_1] - A[x_1]$ 이다. 또한 가정에 의해 $A[y_1] - A[x_1] > A[y_2] - A[x_2]$ 이다. 고로 $A[y'] > A[y_2]$ 이며, $S(i+1) - \{y'\} + \{x_2\}$ 가 $S(i)$ 보다 더 낮은 비용을 가지게 되어 모순이다.

T가 볼록하며, 가능한 기울기의 수가 $\max |A_i|$ 에 비례하니, $A'[i] = A[i] - B[i] \times \lambda$로 두고 부분문제 3을 풀면 T에서 기울기가 변하는 점을 모두 구할 수 있다. (Aliens' trick, Lagrange optimization) 가능한 모든 기울기를 시도해보면 부분문제 4를 해결할 수 있다. 시간복잡도는 $O(\max |A_i| \times N \log N)$이다.

부분문제 6

$R = S(l) - S(r), B = S(r) - S(l)$라고 하자. $S(l)$에서 시작해서 R의 원소를 하나 지우고, B의 원소를 하나 추가하는 것을 반복하여 $S(l+1), \cdots, S(r)$을 만들 수 있다. $S(i)$에서 $S(i+1)$로 갈 때 제거한 원소를 r_i, 추가한 원소를 b_i라고 하자. 집합 $D = \{(r_l, b_l), (r_{l+1}, b_{l+1}), \cdots, (r_{r-1}, b_{r-1})\}$을 구하면 충분하다: 집합의 각 원소가 구체적으로 언제 지워졌는지를 알지 못한다 해도, 볼록성에 의해 정렬할 경우 쉽게 그 시점을 역산할 수 있다.

어떠한 좋은 집합 S 와 위치 $b \in S$ 에 대해서, $(S \cup \{b\}) - \{c\}$ 가 좋은 집합인 모든 $c \in S$ 를, b 가 이루는 **서킷**이라고 정의한다. 서킷은 스패닝 트리의 사이클과 유사한 개념이라고 생각하면 되며, 매트로이드 이론에서 사용하는 용어를 그대로 차용하였다.

다음 그리디 알고리즘은 D를 올바르게 구함을 증명할 수 있다:

1. $D = \emptyset, S = S(l)$에서 시작한다.
2. B의 원소를 비용 오름차순으로 보면서 반복한다. $b \in B$에 대해, b 가 이루는 서킷에 속한 가장 비용이 큰 $r \in R$을 선택한다. $D \leftarrow D \cup \{(r, b)\}, S \leftarrow (S \cup \{b\}) - \{r\}$를 한다.

$S \cup \{b\}$의 서킷에 속하는 원소는, $str(S \cup \{b\})$의 모든 `))...))**...**((...((`꼴 길이 $H+1$ 부분수열에서 `*` 에 속해야 한다. 이는 이와 같은 부분수열 중 `*`의 개수가 최소인 부분수열에 속함과 동치임을 보일 수 있다. 따라서, 서킷에 속한 가장 비용이 큰 r 은 세그먼트 트리로 구할 수 있다. 고로 위 그리디 알고리즘을 $O(N \log N)$ 에 구현할 수 있다.